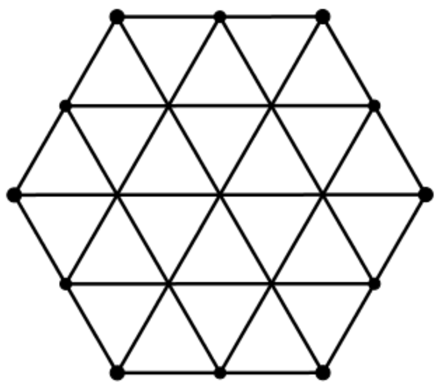
OMCC

Luis Modes

Problema 1: En la figura se muestra una malla hexagonal formada por triangulitos equiláteros. Gabriel y Arnoldo toman turnos para jugar de la siguiente manera. En su turno, cada jugador colorea un segmento de recta, incluidos sus extremos, de acuerdo a las siguientes reglas:

- Los extremos del segmento deben coincidir con los vértices de alguno de los triangulitos.
- El segmento debe estar formado por uno o varios lados de alguno de los triangulitos.
- El segmento no puede tener ningún punto en común con ninguno de los segmentos coloreados anteriormente (incluidos los extremos).

Pierde el jugador que en su turno no pueda colorear ningún segmento. Si Gabriel juega primero, determine qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbala.



Solución: Veamos que la estrategia ganadora la tiene Gabriel, y es la siguiente: Colorear una diagonal del hexágono que esté sobre alguno de sus ejes de simetría y luego jugar de manera simétrica (si A_1 y B_1 son las reflexiones de A y B con respecto al centro del hexágono, respectivamente, y un jugador colorea el segmento AB, se dice que el otro juega de manera simétrica si y solo si colorea el segmento A_1B_1).

Notemos que si Gabriel colorea una diagonal sobre un eje de simetría, el hexágono quedará dividido en 2 mitades congruentes con igual cantidad de segmentos coloreables. Ahora, por la tercera condición del problema, no será posible colorear un segmento cuyos extremos estén en mitades distintas, pues estarían pasando sobre la diagonal coloreada. Esto garantiza que Gabriel siempre podrá hacer una jugada, pues es él quien colorea la diagonal, y luego de que Arnoldo coloree cualquier segmento, a él solo le corresponderá jugar de manera simétrica. Por lo tanto, al poder jugar siempre que Arnoldo pueda, Gabriel no será quien pierda, y, como el juego es finito, Arnoldo perderá, por lo que Gabriel tiene la estrategia ganadora.

Problema 2: Una pareja (a, b) de enteros positivos con $a < 391$ es *pupusa* si

$$\text{mcm}(a, b) > \text{mcm}(a, 391).$$

Determine el valor mínimo que toma b entre todas las posibles parejas pupusa (a, b).

Nota: $\text{mcm}(a, b)$ denota el mínimo común múltiplo de a y b.

Solución: En una pareja pupusa, hay 2 posibilidades para a: que a sea primo relativo con 391 o que no lo sea. En el primer caso, tendríamos

$$ab \geq \text{mcm}(a, b) > \text{mcm}(a, 391) = 391a,$$

por lo que, en este caso,

$$\begin{gathered} ab > 391a \\ b > 391. \end{gathered}$$

En el segundo caso, como $391 = (17)(23)$, hay 3 subcasos: $a = 17c$, $a = 23c$ o $a = 391c$, con c siendo un entero positivo primo relativo con 391. En el primer subcaso,

$$17bc = ab \geq \text{mcm}(a, b) > \text{mcm}(a, 391) = \text{mcm}(17c, 391) = 391c,$$

por lo que

$$\begin{gathered} 17bc > 391c \\ b > 23. \end{gathered}$$

En el segundo subcaso,

$$23bc = ab \geq \text{mcm}(a, b) > \text{mcm}(a, 391) = \text{mcm}(23c, 391) = 391c,$$

por lo que

$$\begin{gathered} 23bc > 391c \\ b > 17. \end{gathered}$$

Finalmente, en el tercer subcaso,

$$391bc = ab \geq \text{mcm}(a, b) > \text{mcm}(a, 391) = \text{mcm}(391c, 391) = 391c,$$

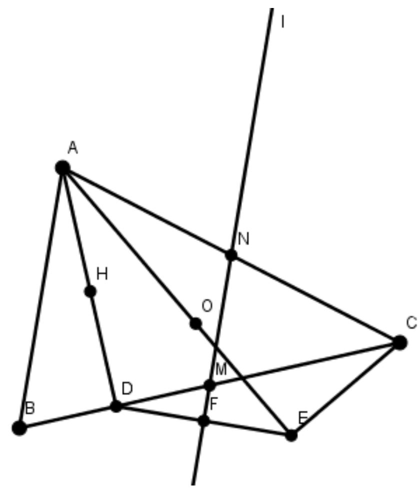
por lo que

$$\begin{gathered} 391bc > 391c \\ b > 391. \end{gathered}$$

Luego, observando lo que hallamos en cada caso, nos damos cuenta de que b es mínimo cuando $b > 17$.

Por lo tanto, el valor mínimo que toma b es 18.

Problema 3: Dado un triángulo ABC, sean D el pie de la altura desde A, y l la recta que pasa por los puntos medios de AC y BC. Sea E la reflexión del punto D respecto a l. Demuestre que el circuncentro del triángulo ABC está sobre la recta AE.



Solución: Sea H el ortocentro de $\triangle ABC$. Sean M y N los puntos medios de BC y AC, respectivamente, y sea F la intersección de MN con DE.

Como AD es altura, $\triangle ADC$ es rectángulo en D, por lo que N es su circuncentro. Entonces, l pasa por el circuncentro de $\triangle ADC$, es decir, es un eje de simetría de dicho circuncírculo. En consecuencia, la reflexión de D, que esá sobre el circuncírculo, con respecto a l también estará sobre el circuncírculo. Luego, el cuadrilatero $ADEC$ es cíclico.

Al ser cíclico, tenemos que

$$\angle CAE = \angle CDE = \angle CDF.$$

Sin embargo, tomando en cuenta que $\angle DFM = 90\ ^{\text{o}}$ (ya que E es la reflexión de D con respecto a l, $DE \perp l$) y tomando en cuenta el $\triangle DFM$,

$$\begin{gathered}\angle CAE = \angle CDF \\ \angle CAE = \angle MDF \\ \angle CAE = 180^{\text{o}}\ -(\angle DFM + \angle DMF) \\ \angle CAE = 180^{\text{o}}\ -(90^{\text{o}}+\angle DMF) \\ \angle CAE = 90^{\text{o}}\ -\angle DMF\end{gathered}$$

Ahora, como $AB \parallel l$, $\angle DMF = \angle ABD = 90^{\text{o}}\ -\angle BAD = 90^{\text{o}}\ -\angle BAH$, por lo que

$$\begin{gathered}\angle CAE = 90^{\text{o}}\ -\ (90^{\text{o}}\ -\angle BAH) \\ \angle CAE = \angle BAH.\end{gathered}$$

Recordemos que, al ser O y H isogonales,

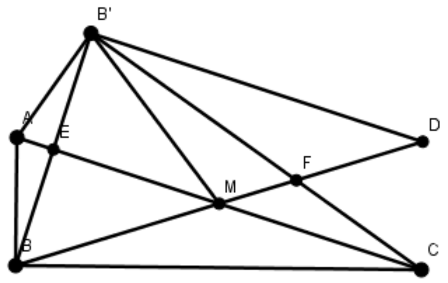
$$\angle CAO = \angle BAH.$$

Por lo tanto,

$$\angle CAE = \angle BAH = \angle CAO,$$

es decir, A, O y E son colineales.

Problema 4: Sea ABC un tríangulo rectángulo en B. Sean B' la reflexión de B con respecto a la recta AC y M el punto medio de AC. Se prolonga BM más allá de M hasta un punto D de modo que $BD = AC$. Demuestre que $B'C$ es la bisectriz del ángulo $\angle MB'D$.



Solución: Sea $\alpha = \angle MBC$ y F la intersección de BD con $B'C$. Como $\triangle ABC$ es rectángulo en B, M es su circuncentro. Luego, $BM = AM = CM$, por ser circunradios. Entonces, $\triangle MBC$ es isósceles, por lo que $\angle MCB = \angle MBC = \alpha$. Ahora, por ser ángulo exterior,

$$\angle EMB = 2\alpha.$$

Ahora, si reflejamos $\triangle ABC$ con respecto a AC, obtenemos el tríangulo congruente $AB'C$. Por ser el reflejo, $BE = B'E$, y entonces

$$BB' = 2BE. \tag{1}$$

Como $AC = BD$ y $BM = AM = CM$,

$$\begin{gathered} AC = BD \\ AM + MC = BM + MD \\ AM = MD, \end{gathered}$$

por lo que $AM = CM = DM = BM$, y luego

$$BD = 2BM \tag{2}$$

Luego, por (1), (2) y el criterio lado-ángulo-lado,

$$\triangle EBM \sim \triangle B'BD,$$

es decir,

$$\begin{gathered} \angle B'DB = \angle EMB \\ \angle B'DB = 2\alpha. \end{gathered}$$

Ahora, como B' es el reflejo de B con respecto a AC, $\triangle MBC \cong \triangle MB'C$, por lo que

$$\angle MCB = \angle MBC = \angle MCB' = \angle MB'C = \alpha.$$

En $\triangle BFC$,

$$\begin{gathered}\angle BFC = 180^{\text{o}} \; -(\angle FBC + \angle FCB)\\ \angle BFC = 180^{\text{o}} \; -(\angle MBC + \angle MCB + \angle MCB')\\ \angle BFC = 180^{\text{o}} \; - \; 3\alpha.\end{gathered}$$

Luego, $\angle B'FD = \angle BFC = 180^{\text{o}} \; - \; 3\alpha$.

En $\triangle B'FD$,

$$\begin{gathered}\angle DB'F = 180^{\text{o}} \; -(\angle B'FD + \angle FDB')\\ \angle DB'F = 180^{\text{o}} \; -(\angle B'FD + \angle B'DB)\\ \angle DB'F = 180^{\text{o}} \; -(180^{\text{o}} - 3\alpha + 2\alpha)\\ \angle DB'F = \alpha.\end{gathered}$$

Por lo tanto, $\angle MB'C = \angle DB'F = \angle DB'C = \alpha$, es decir, $B'C$ es la bisectriz de $\angle MB'D$, como queríamos probar.

Problema 5: Susana y Brenda juegan a escribir polinomios, tomando turnos iniciando por Susana.

- En el turno de preparación (turno 0), Susana elige un entero positivo n_0 y escribe el polinomio $P_0(x) = n_0$.
- Luego, en el turno 1, Brenda elige un entero positivo n_1 distinto de n_0 y escribe uno de los dos polinomios:

$$P_1(x) = n_1 x - P_0(x) \text{ o bien } P_1(x) = n_1 x + P_0(x).$$

- En general, en el turno k, la jugadora correspondiente elige un entero positivo n_k distinto de n_0, n_1,..., n_{k-1} y escribe uno de los dos polinomios:

$$P_k(x) = n_k x^k - P_{k-1}(x) \text{ o bien } P_k(x) = n_k x^k + P_{k-1}(x).$$

Gana quien escriba un polinomio que tenga por lo menos una raíz entera. Determine qué jugadora tiene una estrategia ganadora y describa dicha estrategia.

Solución: La estrategia ganadora la tiene Susana, y es la siguiente. En el turno 0, Susana elige $n_0 = 1$. En turno 1, hay 2 casos.

En el primer caso, Brenda escribe el polinomio $P_1(x) = n_1 x - 1$. La única raíz de este polinomio es $\frac{1}{n_1}$. Por las reglas del juego, $n_1 > 0$ y $n_1 \neq n_0 = 1$, por lo que esta raíz no es entera.

Ahora, en el turno 2, Susana elige $n_2 = n_1 + 1$, y escribe el polinomio $P_2(x) = (n_1 + 1)x^2 + n_1 x - 1$.

Sin embargo,

$$(n_1 + 1)x^2 + n_1 x - 1 = (x + 1)((n_1 + 1)x - 1).$$

Como -1 es raíz de este polinomio, Susana gana.

En el segundo caso, Brenda escribe el polinomio $P_1(x) = n_1 x + 1$. La única raíz de este polinomio es $-\frac{1}{n_1}$. Por las reglas del juego, $n_1 > 0$ y $n_1 \neq n_0 = 1$, por lo que esta raíz no es entera.

Ahora, en el turno 2, Susana elige $n_2 = (n_1 + 1)$, y escribe el polinomio $P_2(x) = (n_1 + 1)x^2 - (n_1 x + 1)$.

Sin embargo,

$$(n_1 + 1)x^2 - (n_1 x + 1) = (x - 1)((n_1 + 1)x + 1).$$

Como 1 es raíz de este polinomio, Susana también gana.

Por lo tanto, como Brenda no puede hacer nada en el turno 1 para que Susana no gane, Susana siempre ganará con esta estrategia.

Problema 6: Sea k un entero mayor que 1. Inicialmente la rana Tita se encuentra situada sobre el punto k de la recta numérica. En un movimiento, si Tita se encuentra sobre el punto n, entonces salta al punto $f(n) + g(n)$, donde $f(n)$ y $g(n)$ son el mayor y el mayor número primo (ambos positivos) que dividen a n, respectivamente. Determine todos los valores de k para los cuales Tita puede visitar una cantidad infinita de puntos diferentes de la recta numérica.

Solución: Utilicemos la notación $a \longrightarrow b$ para indicar que la rana salta del punto a al punto b. (Recordemos que esto ocurre si y solo si $b = f(a) + g(a)$).

Como $f(2) + g(2) = f(4) + g(4) = 2 + 2 = 4$,

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 4 \longrightarrow ...,$$

por lo que, si la rana llega en algún momento al punto 2 o 4, ya solo visitará el punto 4, es decir, una cantidad finita de puntos.

Notemos que

$$3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5 \longrightarrow 10 \longrightarrow 7 \longrightarrow 14 \longrightarrow 9 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow ...,$$

es decir, si la rana llega a alguno de estos puntos, su recorrido también será finito, pues regresa al punto 3.

También,

$$11 \longrightarrow 22 \longrightarrow 13 \longrightarrow 26 \longrightarrow 15 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow ...,$$

por lo que este recorrido también es finito, pues llega al 4.

Igualmente, por llegar al 10, el recorrido

$$17 \longrightarrow 34 \longrightarrow 19 \longrightarrow 38 \longrightarrow 21 \longrightarrow 10 \longrightarrow ...$$

es finito.

Podemos decir entonces que, si la rana llega a alguno de los números en los recorridos anteriores, visitará una cantidad finita de puntos. Particularmente, si llega a un primo menor o igual a 19, su recorrido será finito.

Ahora, veamos el siguiente lema.

Lema 1: si n es un entero positivo compuesto distinto de 4, entonces

$$f(n) + g(n) \leq \tfrac{5}{6}n.$$

Demostración: Notemos que $f(n) \leq \frac{n}{2}$, porque $\frac{n}{2}$ es el mayor divisor primo posible que puede tener n, pues n es compuesto. También notemos que $g(n) \leq \frac{n}{3}$, pues, como $f(n) \leq \frac{n}{2}$ y $f(n) \geq g(n)$, el mayor valor que $g(n)$ puede tener es $\frac{n}{3}$, ya que no puede ocurrir que $f(n) = g(n) = \frac{n}{2}$, porque $n \neq 4$.

$$f(n) + g(n) \leq \tfrac{n}{2} + \tfrac{n}{3}$$
$$f(n) + g(n) \leq \tfrac{5}{6}n.$$

fin del lema

Ahora, demostremos que, no importa en qué punto empiece la rana, nunca podra visitar una cantidad infinita puntos.

- Si la rana se encuentra sobre un número compuesto $n \neq 4$, por el lema, saltará a un número menor o igual a $\frac{5}{6}n < n$. Si $n = 4$, ya probamos que la rana visitará en adelante solo el 4.

- Si la rana se encuentra sobre un número primo p, hay 2 subcasos: que $p+2$ sea compuesto y que sea primo.

  Si $p+2$ es compuesto,

  $$p \longrightarrow 2p \longrightarrow p+2 \longrightarrow ...,$$

  y, por el lema, de $p+2$ salta a un punto j tal que $j \leq \frac{5}{6}(p+2)$. Sin embargo, si $p \geq 13$, $j \leq \frac{5}{6}(p+2) < p$, es decir, acaba visitando un punto menor que p. Ya probamos que si $p < 13 \leq 19$, la cantidad de puntos que visita es finita.

  Si $p+2$ es primo,

  $$p \longrightarrow 2p \longrightarrow p+2 \longrightarrow 2p+4 \longrightarrow p+4 \longrightarrow ...,$$

  y, por el lema, de $p+4$ salta a un punto j tal que $j \leq \frac{5}{6}(p+4)$. Sin embargo, si $p \geq 19$, $j \leq \frac{5}{6}(p+4) < p$, es decir, acaba visitando un punto menor que p. Ya probamos que si $p < 19$, la cantidad de puntos que visita es finita.

  $Nota$: $p+4$ no puede ser primo, pues p y $p+2$ lo son, y entre los números p, $p+2$ y $p+4$ uno es múltiplo de 3. El caso 3, 5 y 7 es la excepción; sin embargo, ya demostramos que si la rana empieza en alguno de estos, la cantidad de puntos que visita es finita.

Demostramos que si la rana está en cualquier número compuesto o en cualquier número primo, eventualmente acabará visitando números menores o iguales (a excepción del 2, pero ya tratamos este caso). El descenso infinito nos garantiza que no pueden ser siempre números estrictamente menores, pues son números enteros positivos, es decir, en algún momento deberá visitar algún punto 2 veces, que significa que la rana visitará otra vez los mismos puntos., es decir, visitará una cantidad finita de puntos.

Por lo tanto, no existe k tal que la rana visite una cantidad infinita de puntos diferentes en la recta numérica.